Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου από το Askisopolis
2024 - 2025

Αντώνης Βαλέργας | **Γαβρήλος Ελευθερίου**
Αποστόλης Κακαβάς | **Στέλιος Μιχαήλογλου**
Άγγελος Μπλιάς | **Θανάσης Νικολόπουλος**
Δημήτρης Πατσιμάς | **Βαγγέλης Ραμαντάνης**
Νίκος Σαμπάνης | **Βαγγέλης Τόλης**
Νίκος Τούντας | **Ισαάκ Χιονίδης**

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 2 ωρών στο 1ο κεφάλαιο

23-11-2024

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

6 μονάδες

Α2. Τι ονομάζεται απόσταση δύο αριθμών α, β, πως συμβολίζεται και με τι είναι ίση;

4 μονάδες

Α3. Να αντιστοιχίσετε την κάθε έκφραση της στήλης Α με την ισοδύναμή της στην στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu}$	**i.** $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}$
β. $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}$	**ii.** α^{ν}
γ. $\alpha^{\mu-\nu}$	**iii.** $\alpha^{-\nu}$
δ. $\left(\alpha^{-\nu}\right)^{-1}$	**iv.** $\alpha^{\mu+\nu}$
ε. $\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$	**v.** $\alpha^{\mu\nu}$

5 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha^2=\alpha\beta$ τότε $\alpha=\beta$.

β) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>\beta$ και $\alpha>-\beta$, τότε $\alpha>0$.

γ) Αν $\alpha\cdot\beta\ge 0$ τότε $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

δ) $\sqrt[4]{\alpha^2}=\alpha$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

ε) Ισχύει $|\alpha|\neq\alpha \Leftrightarrow \alpha<0$.

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει :

- $\alpha^2\le 1$
- $\beta^2-2\beta\le 0$

Β1. Να αποδείξετε ότι $-1\le\alpha\le 1$ και $0\le\beta\le 2$.

5 μονάδες

Δίνεται η παράσταση $A=|\alpha-1|+|\alpha+1|+|\beta|+|\beta-3|$.

Β2. Να αποδείξετε ότι $A=5$.

7 μονάδες

Β3. Να γράψετε την παράσταση $\dfrac{2024}{\sqrt{A}-1}+\dfrac{2025}{2-\sqrt{A}}$ ως ισοδύναμη χωρίς άρρητους παρονομαστές.

6 μονάδες

Β4. Η Άννα ισχυρίζεται ότι $\left(\left((-1)^{A}\right)^{A}\right)^{A}>0$. Συμφωνείτε με την άποψη της Άννας ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5 μονάδες

Θέμα Γ

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει:

- $\dfrac{|\alpha|}{\sqrt{\beta}} \le \sqrt{2\alpha-\beta}$
- $4\gamma \ge \alpha$
- Οι α, γ είναι αντίστροφοι αριθμοί και ο α είναι ακέραιος.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha,\beta \in (0,+\infty)$.

6 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

6 μονάδες

Γ3. Να βρείτε τις πιθανές τιμές των α, γ.

6 μονάδες

Γ4. Αν $\alpha=2$ τότε να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha x^2+\sqrt{2\beta x^4-\sqrt{8\gamma x^8}}}=\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot|x|,\ x\in\mathbb{R}$.

7 μονάδες

Θέμα Δ

Δ1. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K=\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma}-2\right)^2+\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta}+1\right)^3+\left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}-1\right)^4$$

8 μονάδες

Αν το K είναι ίσο με 25,

Δ2. Να γράψετε το γινόμενο $K^6\cdot 8^3$ ως γινόμενο ενός τριψήφιου αριθμού με μία δύναμη του 10 και να βρείτε πόσα μηδενικά έχει στο τέλος το αποτέλεσμα της πράξης.

8 μονάδες

Δ3. Δίνεται ότι $\dfrac{\sqrt{K}+4}{3}=\dfrac{2023+2024+2025}{N}$. Βρείτε την τιμή του $N\in\mathbb{R}$.

9 μονάδες

Καλή τύχη!

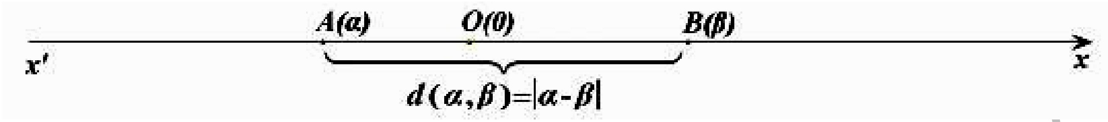
Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|\Leftrightarrow|\alpha\cdot\beta|^2=\left(|\alpha|\cdot|\beta|\right)^2\Leftrightarrow(\alpha\cdot\beta)^2=|\alpha|^2\cdot|\beta|^2\Leftrightarrow\alpha^2\cdot\beta^2=\alpha^2\cdot\beta^2 \text{ ισχύει}$$

Α2. Έστω ότι οι αριθμοί α, β παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β.



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α, β) και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Δηλαδή $\mathbf{d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|}$.

Α3.

α	β	γ	δ	ε
v	iv	i	ii	iii

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

Β1.

- $\alpha^2\le1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2}\le\sqrt{1}\Leftrightarrow|\alpha|\le1\Leftrightarrow-1\le\alpha\le1$.
- $\beta^2-2\beta\le0\Leftrightarrow\beta^2-2\beta+1\le1\Leftrightarrow(\beta-1)^2\le1\Leftrightarrow\sqrt{(\beta-1)^2}\le1\Leftrightarrow|\beta-1|\le1\Leftrightarrow-1\le\beta-1\le1\Leftrightarrow0\le\beta\le2$

Β2. $\alpha\le1\Leftrightarrow\alpha-1\le0\Leftrightarrow|\alpha-1|=1-\alpha$, $-1\le\alpha\Leftrightarrow\alpha+1\ge0\Leftrightarrow|\alpha+1|=\alpha+1$,

$\beta\ge0\Leftrightarrow|\beta|=\beta$ και $\beta\le2\Rightarrow\beta\le3\Leftrightarrow\beta-3\le0\Leftrightarrow|\beta-3|=3-\beta$.

Άρα $A=|\alpha-1|+|\alpha+1|+|\beta|+|\beta-3|=1-\alpha+\alpha+1+\beta+3-\beta=5$.

Β3. $$\frac{2024}{\sqrt{A}-1}+\frac{2025}{2-\sqrt{A}}=\frac{2024}{\sqrt5-1}+\frac{2025}{2-\sqrt5}=\frac{2024\left(\sqrt5+1\right)}{\left(\sqrt5-1\right)\left(\sqrt5+1\right)}+\frac{2025\left(2+\sqrt5\right)}{\left(2-\sqrt5\right)\left(2+\sqrt5\right)}=$$

$$\frac{2024\left(\sqrt5+1\right)}{\sqrt5^2-1}+\frac{2025\left(2+\sqrt5\right)}{2^2-\sqrt5^2}==\frac{2024\left(\sqrt5+1\right)}{4}+\frac{2025\left(2+\sqrt5\right)}{-1}=$$

$$506\left(\sqrt5+1\right)-2025\left(2+\sqrt5\right)=-1519\sqrt5-3544.$$

Β4. $\left(\left((-1)^5\right)^5\right)^5=\left((-1)^5\right)^5=(-1)^5=-1<0$. Η άποψη της Άννας είναι λανθασμένη.

Θέμα Γ

Γ1. Η ανίσωση $\frac{|\alpha|}{\sqrt\beta}\le\sqrt{2\alpha-\beta}$ ορίζεται όταν: $\begin{cases}\sqrt\beta\ne0\\ \beta\ge0\\ 2\alpha-\beta\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta\ne0\\ \beta\ge0\\ 2\alpha\ge\beta\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta>0\\ \alpha\ge\frac{\beta}{2}>0\end{cases}$

Άρα $\alpha,\beta>0$ δηλαδή $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$

Γ2. $\dfrac{|\alpha|}{\sqrt{\beta}} \le \sqrt{2\alpha-\beta} \overset{\beta>0 \Leftrightarrow \sqrt{\beta}>0}{\Leftrightarrow} |\alpha| \le \sqrt{\beta}\cdot\sqrt{2\alpha-\beta} \Leftrightarrow |\alpha| \le \sqrt{2\alpha\beta-\beta^2} \Leftrightarrow |\alpha|^2 \le \sqrt{2\alpha\beta-\beta^2}^{\,2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 \le 2\alpha\beta-\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \le 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \le 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$

Γ3. $4\gamma \ge \alpha > 0$ και α, γ αντίστροφοι άρα $\gamma=\dfrac{1}{\alpha}$, οπότε $\dfrac{4}{\alpha} \ge \alpha \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 \le 4 \Leftrightarrow |\alpha| \le 2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 0<\alpha\le 2$ και

επειδή ο α είναι θετικός ακέραιος τότε $\alpha=1$ ή $\alpha=2$. Αν $\alpha=1$ τότε $\gamma=1$ και αν $\alpha=2$ τότε $\gamma=\dfrac{1}{2}$.

Γ4. Αν $\alpha=2$ τότε $\beta=2$ και $\gamma=\dfrac{1}{2}$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $\sqrt{\alpha x^2+\sqrt{2\beta x^4-\sqrt{8\gamma x^8}}} = \sqrt{2x^2+\sqrt{4x^4-\sqrt{4x^8}}} = \sqrt{2x^2+\sqrt{4x^4-2x^4}} =$

$=\sqrt{2x^2+\sqrt{2x^4}} = \sqrt{2x^2+\sqrt{2}\cdot x^2} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)x^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,|x| = \sqrt{2+2^{\frac{1}{2}}}\,|x| =$

$=\sqrt{2^{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)}\,|x| = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{2^{\frac{1}{2}}+1}\,|x| = 2^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{2}+1}\,|x| = \sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot|x|$

Θέμα Δ

Δ1. Από την $\alpha+\beta+\gamma=0$ παίρνουμε τις $\alpha+\beta=-\gamma$, $\alpha+\gamma=-\beta$ και $\beta+\gamma=-\alpha$.

Με αντικατάσταση η παράσταση Κ γράφεται:

$$K=\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma}-2\right)^2+\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta}+1\right)^3+\left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}-1\right)^4=\left(\frac{-\gamma}{\gamma}-2\right)^2+\left(\frac{-\beta}{\beta}+1\right)^3+\left(\frac{-\alpha}{\alpha}-1\right)^4$$

$$=(-1-2)^2+(-1+1)^3+(-1-1)^4=(-3)^2+0^3+(-2)^4=9+0+16=25.$$

Δ2. Είναι $K^6\cdot 8^3 = 25^5\cdot 8^3 = \left(5^2\right)^6\cdot\left(2^3\right)^3 = 5^{12}\cdot 2^9 = 5^3\cdot 5^9\cdot 2^9 = 125\cdot(5\cdot 2)^9 = 125\cdot 10^9$

Έτσι, το αποτέλεσμα της πράξης έχει στο τέλος εννέα μηδενικά.

Δ3. Έχουμε $\dfrac{\sqrt{K}+4}{3}=\dfrac{2023+2024+2025}{N}$, οπότε εφόσον Κ=25 , η δοσμένη σχέση γίνεται

$$\frac{\sqrt{25}+4}{3}=\frac{2023+2024+2025}{N} \Leftrightarrow 3=\frac{2024-1+2024+2024+1}{N} \Leftrightarrow$$

$$3=\frac{3\cdot 2024}{N} \Leftrightarrow 3N=3\cdot 2024 \Leftrightarrow N=2024$$